第13講　底の変換，対数関数のグラフと方程式・不等式，常用対数

§1　底の変換公式

要点整理 と 公式

要点1　対数の底の変換公式

1024に関して，$\log_2 1024 = \log_2 2^{10} =$ 　　である。

このように，ある実数 M に関して，底を c とする対数 $\log_c M$ を求めることを，

底を c とする「対数をとる」という。

これを用いて，a を底とする対数 $\log_a b$ を，c を底とする対数で表す。

$\log_a b = p$ とすると　　$a^p = b$

c を底とする両辺の「対数をとる」と　　$a^p =$ 　　b

対数の性質より $p\log_c a = \log_c b$

$a \neq 1$ より $\log_c a \neq 0$ 　よって $p = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

したがって，$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ である。

■ 底の変換公式

a，b，c が正の数で，$a \neq 1$，$c \neq 1$ のとき

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

(ex) $\log_9 27 = \dfrac{\log_3 \quad}{\log_3 \quad} = \dfrac{\log_3 3^3}{\log_3 3^2} = \dfrac{3}{2}$

とくに，$b \neq 1$ のとき　$\log_a b = \dfrac{\log_b \quad}{\log_b \quad} = \dfrac{1}{\log_b a}$ より

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

［1］　次の値を求めよ。　（1）　$\log_{16} 8$　（2）　$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27}$

［2］　次の計算をせよ。

（1）　$\log_2 5 \cdot \log_5 32$　（2）　$\log_9 49 - \log_3 63$

Point Pickup

底の変換公式

a，b，c が正の数で，$a \neq 1$，$c \neq 1$ のとき

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

底がそろっていないときの対数の計算は，底の変換公式でそろえるとよい。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ 対数関数とそのグラフ

要点整理 と 公式

要点2 対数とそのグラフ

対数関数 $y=\log_2 x$ のグラフについて考える。

$x=2,\ 4,\ 8$ のとき，　$y=$

$x=1$ のとき，$y=\log_2 1=\log_2 2^0=$

$x=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8}$ のとき，$y=$

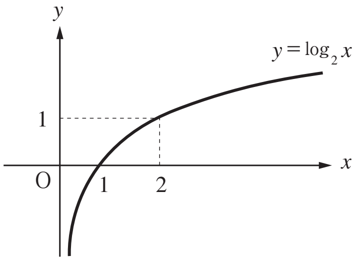
である。

$y=\log_2 x$　より　$x=2^y$　である。$2^y>0$より　$x>0$　である。

よって，$y=\log_2 x$　の定義域は「　　　　」である。

x が無理数の場合も含め，$x>0$ である x に対応する y の値を求め，x，y の値の組 $(x,\ y)$ を座標とする点を座標平面上にとると，右図のような曲線が得られる。

これが対数関数　$y=\log_2 x$　のグラフである。



次に，対数関数　$y=\log_{\frac{1}{2}} x$　のグラフについて考える。この式は

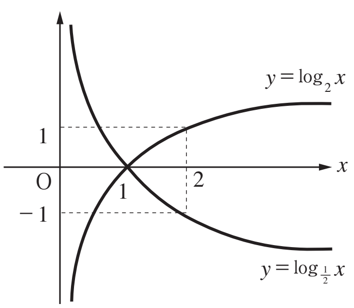
$$y=\frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}}=\frac{\log_2 x}{-1}=-\log_2 x$$

つまり $-y=\log_2 x$　と変形できる。

この式は，$y=\log_2 x$ の式の y が $-y$ におき換わったものである。

よって，$y=\log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフは，

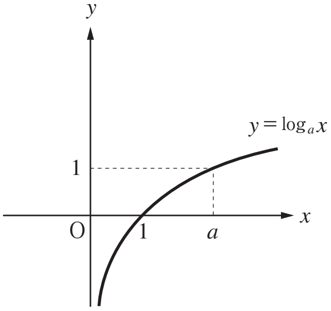
$y=\log_2 x$ のグラフと「x 軸に関して対称」である。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

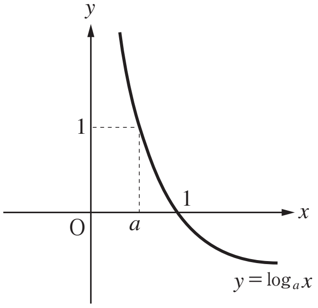
一般に，対数関数 $y = \log_a x$ のグラフは以下のようになる。

■対数関数のグラフ



$a > 1$ のとき

右上がり



$0 < a < 1$ のとき

右下がり

いずれも y 軸を「漸近線」としてもち，$(1,\ 0)$，$(a,\ 1)$ を通る。

定義域は「　　　　」，値域は実数全体である。

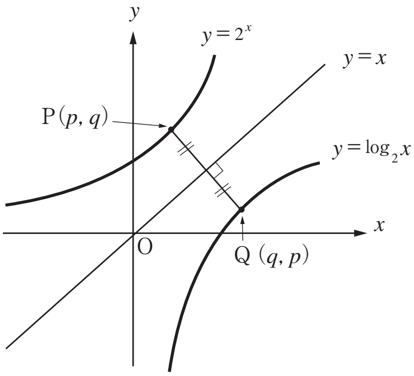
※点P $(p,\ q)$ が関数 $y = 2^x$ のグラフ上にあるとき，

$q = 2^p$　　つまり　　$p = \log_2 q$　　である。

これは，点Q $(q,\ p)$ が関数 $y = \log_2 x$ のグラフ上にあることを示している。

逆に点Q が関数 $y = \log_a x$ のグラフ上にあれば，

点 P は関数 $y = a^x$ のグラフ上にある。



点 $(p,\ q)$ と点 $(q,\ p)$ は直線 $y = x$ に関して対称で

あるから，$y = 2^x$ のグラフと $y = \log_2 x$ のグラフは，直線 $y = x$ に関して対称である。

一般に，底がともに a である指数関数 $y = a^x$ のグラフと対数関数 $y = \log_a x$ のグラフは，直線 $y = x$ に関して対称である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

関数 $y = \log_3 x$ のグラフをかけ。

また，それと同じ座標平面上に，関数 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ のグラフをかけ。

Point Pickup

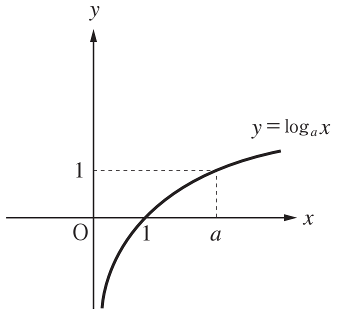
対数関数 $y = \log_a x$ のグラフ

・$a > 0$ のとき「右上がり」，　$0 < a < 1$ のとき「右下がり」の曲線

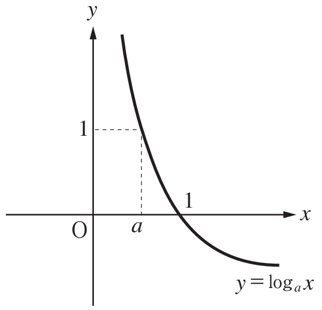
・y 軸を漸近線としてもつ。

・$(1,\ 0)$，$(a,\ 1)$ を通る。

・x の変域は「　　　」，yの変域は実数全体



$a > 1$ のとき



$0 < a < 1$ のとき

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▶ 対数の大小，対数方程式・不等式

要点整理 と 公式

要点3 対数の大小

対数関数　$y=\log_a x$　のグラフより，次のことがいえる。

■真数の大小と対数の大小

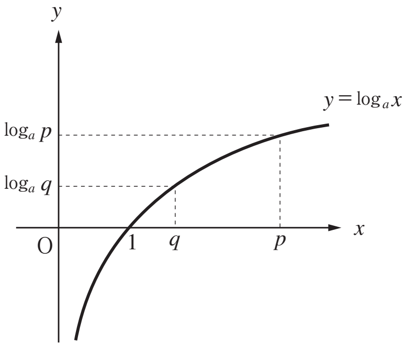
$a>1$ のとき　　x の値が増加すると y の値が増加する

つまり　　$p>q \iff \log_a p>\log_a q$

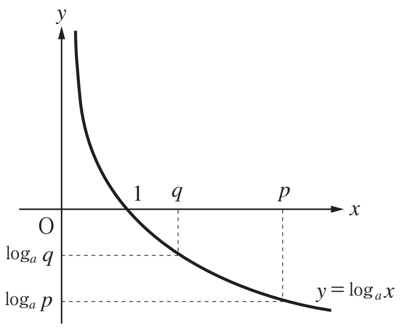
$0<a<1$ のとき　x の値が増加すると y の値は減少する

つまり　　$p>q \iff \log_a p<\log_a q$

$a>1$ のとき



$0<a<1$ のとき



(ex)　$\log_2 3$　と　$\log_4 10$ の大小を考える。

$$\log_4 10=\frac{\log_2 10}{\log_2 4}=\frac{\log_2 10}{2}=\frac{1}{2}\log_2 10=\log_2 10^{\frac{1}{2}}=\log_2\sqrt{10}$$

真数の大小について，$3<\sqrt{10}$

底2 は「　　　　　　　」から　$\log_2 3<\log_2\sqrt{10}$

つまり　$\log_2 3<\log_4 10$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点4 対数を含む方程式

対数の性質を用いて，対数を含む方程式を解く。

（ex）方程式 $\log_2 x = 3$　を解く。

真数は「正」であるから，$x > 0$ … ①

対数の定義より　$x = 2^3 = 8$

これは①を満たすから　　$x = 8$

また，$a > 0$，$a \neq 1$，つまり a を 1 でない正の定数とするとき，以下のことがいえる。

■ **対数の相等**

$p > 0$，$q > 0$ のとき

$p = q \iff \log_a p = \log_a q$

このことを利用して，対数を含む方程式を解く。

（ex）方程式 $\log_2 x = 3$　を解く。

真数は「正」であるから，$x > 0$ … ①

また $3 = \log_2$　　　より，方程式を変形して　$\log_2 x = \log_2 2^3$

つまり，$\log_2 x = \log_2 8$

よって　$x = 8$　これは①を満たすから　$x = 8$

要点5 対数を含む不等式

対数関数の大小に関する性質を利用して，対数関数を含む不等式を解く。

（ex）不等式　$\log_{\frac{1}{2}} x > 2$ を解く。

真数は「正」であるから，$x > 0$ … ①

不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2$　つまり　$\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$

底 $\frac{1}{2}$ は「　　　　　　　　　　　　」から　$x < \frac{1}{4}$ … ②

①，②より $0 < x < \frac{1}{4}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

［1］ $\log_3 \frac{1}{2}$，$\log_9 4$，0，1 の大小を不等号を用いて表せ。

［2］ 次の方程式，不等式を解け。

(1) $\log_2(x-1)=4$　(2) $\log_2 x+\log_2(x+2)=3$　(3) $\log_{\frac{1}{3}} x \geqq 3$

Point Pickup

真数の大小と対数の大小

$\Longrightarrow$ 「底」を揃えて，対数の性質

$a>1$ のとき　$p>q \iff \log_a p > \log_a q$ （不等号の向きは同じ）

$0<a<1$ のとき　$p>q \iff \log_a p < \log_a q$ （不等号の向きが逆になる）

を利用する。

対数を含む方程式（対数方程式）

$\Longrightarrow$ 「対数の定義」 $\log_a x = b \iff x =$ 　　　を用いる。

または，「底」を揃えて，対数の性質

$p=q \iff \log_a p = \log_a q$

を利用する。

「　　　　　　」であることに注意。

対数を含む不等式（対数不等式）

$\Longrightarrow$ 「底」を揃えて，真数の大小と対数の大小の関係を用いる。

「　　　　　　」であることに注意。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 常用対数

要点整理 と 公式

要点 6 常用対数

ある数 x の「10 を底とする対数」$\log_{10} x$ を「　　　　　　」という。

いくつかの x の値に対する常用対数の値を，以下の表に表す。

x	…	10000	1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$	…
$\log_{10}x$	…	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	…

また，$x = 2$のとき　$\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$

$x = 3$のとき　$\log_{10}3 \fallingdotseq 0.4771$　　　である。

さらに，2 の常用対数の値を，$\log_{10}2 = 0.3010$　とすると，

$\log_{10}4 = \log_{10}2^2 = 2\log_{10}2 = 2 \times 0.3010 = 0.6020$ となり，

4 の常用対数の値を求めることができる。

$y = \log_{10}x$ は増加関数であることより，

x が 1 桁の数　$\Longleftrightarrow$　$1 \leqq x < 10$　$\Longleftrightarrow$　$10^0 \leqq x < 10^1$　$\Longleftrightarrow$　$0 \leqq \log_{10}x < 1$

x が 2 桁の数　$\Longleftrightarrow$　$10 \leqq x < 100$　$\Longleftrightarrow$　$10^1 \leqq x < 10^2$　$\Longleftrightarrow$　$1 \leqq \log_{10}x < 2$

である。

一般に 以下のことが成り立つ。

■ **整数 N の桁数**

N が n 桁の数　$\Longleftrightarrow$　$10^{n-1} \leqq N < 10^n$　　$\Longleftrightarrow$　$n - 1 \leqq \log_{10}N < n$

したがって，自然数 N の桁数を調べたいときは，

「　　　　　」の値を計算し，それがどの範囲にあるかを調べれば良い。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

［1］ $\log_{10}2 = 0.3010$，$\log_{10}3 = 0.4771$ とするとき，$\log_{10}15$ の値を求めよ。

［2］ 2^{30} は何桁の整数か。ただし，$\log_{10}2 = 0.3010$ とする。

Point Pickup

$\log_{10}2$，$\log_{10}3$ の値から対数の値を求める

対数の性質

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N \qquad \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a M^k = k\log_a M$$

を用いて，$\log_{10}2$，$\log_{10}3$ の値を使える形に変形する。

桁数を求める

整数 N の桁数を求める手順は以下。

① N の「常用対数」をとり，$\log_{10}N$ の値を求める。

② $n-1 \leqq \log_{10}N < n$ となるような整数 n をみつける。

③ $10^{n-1} \leqq N < 10^n$ の形になおす。

④ 整数 N の桁数は n 桁である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第13講　確認テスト

1 (1) $\log_8 4 = \dfrac{\log_2 \boxed{ア}}{\log_2 \boxed{イ}} = \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$

(2) (i) $\log_3 2 \cdot \log_2 9 = \boxed{オ}$　　(ii) $\log_8 27 - \log_2 24 = \boxed{カキ}$

2 次の $\boxed{}$ にあてはまるものを，下の①～④から選べ。

対数関数 $y = \log_a x$ のグラフは，$a > 1$ のとき $\boxed{ク}$，$0 < a < 1$ のとき $\boxed{ケ}$ の曲線である。また，$\boxed{コ}$ を漸近線にもつ。

関数 $y = \log_a x$　のグラフと，$y = \log_{\frac{1}{a}} x$ のグラフは $\boxed{サ}$ に関して対称である。

①　右上がり　　②　右下がり　　③　x 軸　　④　y 軸

3 (1) 次の 3 つの数の大小を不等号を用いて表すと $\boxed{シ} < \boxed{ス} < \boxed{セ}$ である。

①　$\log_{\frac{1}{3}} 5$　　②　$3\log_{\frac{1}{3}} 2$　　③　$\log_{\frac{1}{3}} 7$

(2) 次の方程式，不等式を解け。

(i) $\log_3 x = 2$　　$x = \boxed{ソ}$　　(ii) $\log_2 x < 5$　　$\boxed{タ} < x < \boxed{チツ}$

4 $\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$　とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\log_{10} 6 = 0.\boxed{テトナニ}$ である。　　(2) 3^{30} は $\boxed{ヌネ}$ 桁の整数である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第13講　底の変換，対数関数のグラフと方程式・不等式，常用対数

1

［1］（1）$\log_{16} 8 = \dfrac{\log_2 8}{\log_2 16} = \dfrac{\log_2 2^3}{\log_2 2^4} = \dfrac{3}{4}$

（2）$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27} = \dfrac{\log_3 \sqrt{27}}{\log_3 \dfrac{1}{3}} = \dfrac{\log_3 3^{\frac{3}{2}}}{\log_3 3^{-1}} = \dfrac{\dfrac{3}{2}}{-1} = -\dfrac{3}{2}$

［2］（1）$\log_2 5 \cdot \log_5 32 = \log_2 5 \times \dfrac{\log_2 32}{\log_2 5} = \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$

（2）$\log_9 49 - \log_3 63 = \dfrac{\log_3 49}{\log_3 9} - \log_3 63$

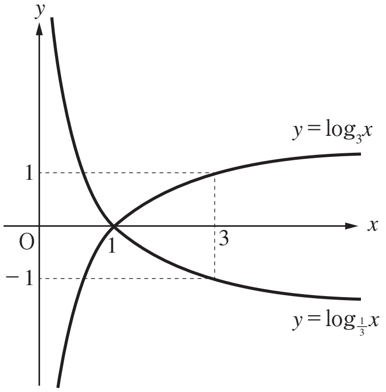
$= \dfrac{\log_3 7^2}{2} - \log_3 63$

$= \dfrac{1}{2} \log_3 7^2 - \log_3 63$

$= \log_3 (7^2)^{\frac{1}{2}} - \log_3 63$

$= \log_3 7 - \log_3 63 = \log_3 \dfrac{7}{63} = \log_3 \dfrac{1}{9} = -2$

2



3

［1］$\log_9 4 = \dfrac{\log_3 4}{\log_3 9} = \dfrac{1}{2} \log_3 4 = \log_3 4^{\frac{1}{2}} = \log_3 2,\quad 0 = \log_3 1,\quad 1 = \log_3 3$

真数の大小について　$\dfrac{1}{2} < 1 < 2 < 3$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

底 3 は 1 より大きいから　$\log_3 \frac{1}{2} < \log_3 1 < \log_3 2 < \log_3 3$

よって　$\log_3 \frac{1}{2} < 0 < \log_9 4 < 1$

[2]　(1)　真数は正であることから　$x-1>0$　つまり　$x>1 \cdots$ ①

$\log_2(x-1)=4$　より　$x-1=2^4$　　$x-1=16$　　$x=17$

①から　$x=17$

(2)　真数は正であることから　$x>0$　かつ　$x+2>0$　よって　$x>0 \cdots$ ①

方程式を変形して　$\log_2 x(x+2)=\log_2 2^3$

よって　$x(x+2)=2^3$　　$x^2+2x-8=0$　　$(x-2)(x+4)=0$

①から　$x=2$

(3)　真数は正であることから　$x>0 \cdots$ ①

不等式を変形して　$\log_{\frac{1}{3}} x \geqq \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^3$　　つまり　$\log_{\frac{1}{3}} x \geqq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$

底 $\frac{1}{3}$ は 0 より大きく 1 より小さいから　$x \leqq \frac{1}{27} \cdots$ ②

①，②より　$0 < x \leqq \frac{1}{27}$

4

[1]　$\log_{10} 15 = \log_{10}(3 \times 5) = \log_{10} 3 + \log_{10} 5$

$= \log_{10} 3 + \log_{10} \frac{10}{2}$

$= \log_{10} 3 + 1 - \log_{10} 2$

$= 0.4771 + 1 - 0.3010 = 1.1761$

[2]　2^{30} の常用対数をとると

$\log_{10} 2^{30} = 30 \log_{10} 2 = 30 \times 0.3010 = 9.03$

よって　$9 < \log_{10} 2^{30} < 10$　より

$\log_{10} 10^9 < \log_{10} 2^{30} < \log_{10} 10^{10}$

したがって　$10^9 < 2^{30} < 10^{10}$　より，2^{30} は 10 桁の数

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第13講　確認テスト

1 (1) $\log_8 4 = \dfrac{\log_2 \boxed{ア}}{\log_2 \boxed{イ}} = \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$

(2) (i) $\log_3 2 \cdot \log_2 9 = \boxed{オ}$　　(ii) $\log_8 27 - \log_2 24 = \boxed{カキ}$

2 次の $\boxed{}$ にあてはまるものを，下の①～④から選べ。

対数関数 $y = \log_a x$ のグラフは，$a > 1$ のとき $\boxed{ク}$，$0 < a < 1$ のとき $\boxed{ケ}$ の曲線である。また，$\boxed{コ}$ を漸近線にもつ。

関数 $y = \log_a x$　のグラフと，$y = \log_{\frac{1}{a}} x$ のグラフは $\boxed{サ}$ に関して対称である。

①　右上がり　　②　右下がり　　③　x 軸　　④　y 軸

3 (1) 次の3つの数の大小を不等号を用いて表すと $\boxed{シ} < \boxed{ス} < \boxed{セ}$ である。

①　$\log_{\frac{1}{3}} 5$　　②　$3\log_{\frac{1}{3}} 2$　　③　$\log_{\frac{1}{3}} 7$

(2) 次の方程式，不等式を解け。

(i) $\log_3 x = 2$　　$x = \boxed{ソ}$　　(ii) $\log_2 x < 5$　　$\boxed{タ} < x < \boxed{チツ}$

4 $\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$　とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\log_{10} 6 = 0.\boxed{テトナニ}$ である。　　(2) 3^{30} は $\boxed{ヌネ}$ 桁の整数である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

1 (1) ア 4　イ 8　ウ 2　エ 3

(2) (i) オ 2　(ii) カ －　キ 3

2 ク ①　ケ ②　コ ④　サ ③

3 (1) シ ②　ス ③　セ ①

(2) (i) ソ 9　(ii) タ 0　チ 3　ツ 2

4 (1) テ 7　ト 7　ナ 8　ニ 1

(2) ヌ 1　ネ 5

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。